



Penelusuran Aliran Air di Sungai Menggunakan Persamaan Saint-Venant

Bambang Agus Sulistyono^{*}, Samijo, Aprilia Dwi Handayani

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Nisantara PGRI Kediri

*Email korespondensi: bb7agus1@unpkediri.ac.id

Diterima: 6 November 2022

Dipresentasikan: 12 November 2022

Disetujui terbit: 20 Desember 2022

ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah mensimulasikan secara numerik perilaku debit di sepanjang sungai dengan memanfaatkan data debit yang diketahui di hulu sungai. Mekanisme aliran air di sungai dapat digambarkan menggunakan Persamaan Saint-Venant. Dikarenakan persamaan tersebut non-linier dan belum ditemukan penyelesaian analitiknya, maka dalam penelitian ini Persamaan tersebut disederhanakan. Persamaan Saint-Venant yang disederhanakan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga. Hasil simulasi menunjukkan bahwa input hidrograf dengan debit puncak $12 \text{ m}^3/\text{detik}$ mengalami peredaman debit sepanjang sungai. Pada lokasi $x = 600 \text{ m}$ dari hulu sungai debit puncak menjadi $7,38 \text{ m}^3/\text{detik}$.

Kata Kunci : persamaan Saint-Venant, skema beda hingga, hidrograf.

PENDAHULUAN

Banjir merupakan suatu fenomena tergenangnya suatu wilayah daratan dengan air. Pada umumnya banjir terjadi karena ketidakmampuan sungai untuk menampung debit yang masuk ke dalamnya. Kemampuan sungai dalam menampung debit disebut dengan kapasitas sungai. Besar kecilnya kapasitas sungai ditentukan oleh luas penampang basah dan kecepatan aliran. Sedangkan kecepatan aliran di sungai ditentukan oleh kemiringan dasar sungai, kekasaran badan sungai, dan jari-jari penampang sungai. Hujan yang jatuh di daerah aliran sungai atau adanya bendungan yang tiba-tiba bobol akan menyebabkan debit di sungai menjadi meningkat. Apabila peningkatan debit yang masuk ke dalam sungai melebihi kapasitas sungainya, maka air tersebut akan meluber keluar badan sungai yang dapat menyebabkan bencana banjir yang akan berdampak pada rusaknya sarana dan prasarana, terganggunya aktivitas manusia, serta kerugian harta benda bahkan nyawa manusia.

Dengan memanfaatkan data debit yang masuk ke dalam badan sungai, maka dapat ditelusuri perilaku variabel aliran air seperti kecepatan aliran, elevasi muka air dan debit di daerah hilir menggunakan metode penelusuran aliran (*flow routing method*). Secara umum, terdapat dua jenis metode penelusuran aliran yang sering digunakan yaitu hidrologi dan hidraulika. Pada metode hidrologi, perilaku variabel aliran air dihitung sebagai fungsi dari waktu saja sehingga penelusuran terhadap perilaku variabel aliran air hanya dilakukan di lokasi tertentu. Metode hidrologi ini menggunakan pendekatan matematis dari fungsi tampungan (*storage*) yang dibangun berdasarkan hukum kekekalan massa (Bharali & Misra, 2020). Oleh karena itu, dalam prakteknya metode ini hanya mempertimbangkan pada aliran masuk, aliran keluar dan air tampungan. Kelemahan utama dari metode ini adalah tidak adanya kaitan antara variabel-variabel aliran air dengan geometri kanal yang dilalui aliran.

Sedangkan pada metode hidraulika, yang digunakan dalam penelitian ini, variabel aliran air dihitung sebagai fungsi dari waktu dan ruang, sehingga penelusuran aliran dapat dilakukan di setiap lokasi sepanjang kanal. Secara matematis metode hidraulika dibangun berdasarkan pada hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang sering dinamakan persamaan Saint-Venant (Chow et al., 1988). Dengan demikian, penggunaan metode hidraulika untuk permasalahan penelusuran aliran air di sungai lebih mendekati pada kondisi nyata dikarenakan dalam proses pemodelannya metode ini mengkaitkan antara variabel aliran air dengan geometri sungainya seperti kemiringan, kekasaran permukaan, jari-jari hidraulik, panjang sungai, dan lebar penampang sungai.

Pada penelitian ini, metode hidraulika dalam hal ini persamaan Saint-Venant digunakan untuk memprediksi/menghitung besarnya debit aliran di hilir sepanjang sungai berdasarkan data debit yang diketahui di hulu sungai. Persamaan Saint-Venant termasuk jenis persamaan tak linier dengan ketaklinierannya yang sangat kuat dan belum ditemukan penyelesaian analitiknya, kecuali pada kasus-kasus terbatas. Oleh karena itu, yang dikerjakan dalam penelitian ini adalah menyederhanakan persamaan Saint-Venant dan menyelesaikan persamaan tersebut menggunakan metode numerik yang sederhana pula yaitu metode beda hingga.

METODE

Persamaan matematika yang dapat digunakan untuk menggambarkan perilaku aliran tak tunak satu dimensi pada saluran terbuka seperti sungai atau kanal adalah persamaan Saint-Venant. Persamaan ini sering dinamakan model dinamik (Cunge et al., 1980; Szymkiewics, 2010) yang dapat ditulis kembali persamaannya sebagai

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (2)$$

dengan A adalah luas penampang basah, Q adalah debit, h adalah elevasi muka air, g adalah konstanta yang melambangkan percepatan gravitasi, S_f adalah kemiringan gesek (*friction slope*), S_0 adalah kemiringan dasar saluran, x adalah peubah jarak horisontal untuk ruang (*spatial*), dan t adalah peubah waktu (*temporal*).

Untuk penampang berbentuk persegi panjang (Keskin & Ağiralioglu, 1997; Sulistyono et al., 2021), luas penampang basah dapat ditulis sebagai

$$A = bh \quad (3)$$

di mana h adalah lebar kanal. Diasumsikan lebar kanal adalah konstan, sehingga persamaan berikut dapat diperoleh dari Persamaan (3) sebagai

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4) ke dalam Persamaan (2) dan diatur kembali susunan persamaannya maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{gA}{b} - \frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (5)$$

Untuk merumuskan kecepatan aliran dipilih dari formulasi Manning sebagai berikut

$$u = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

di mana R adalah jari-jari hidraulika, dan n adalah koefisien kekasaran Manning, yaitu nilai yang menunjukkan seberapa besar resistensi dilakukan terhadap air oleh dinding sungai (Chaudhry, 2008). Untuk penampang sungai berbentuk persegi panjang, maka berlaku hubungan sebagai berikut.

$$R = \frac{A}{P} \quad (7)$$

$$P = 2h + b \quad (8)$$

di mana P adalah keliling basah penampang melintang.

Dengan mengingat Persamaan (6), (7), dan (8) di atas, maka dapat disusun turunan parsial sebagai berikut

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \left(\frac{1}{P} - \frac{2A}{bP^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{1}{n} R^{-\frac{1}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S_f^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial S_f}{\partial x} \quad (11)$$

Dikarenakan $\frac{\partial S_f}{\partial x}$ sangat kecil apabila dibandingkan dengan suku yang lain, maka suku kedua di ruas kanan dari Persamaan (11) dapat dihilangkan (Keskin, 1999). Oleh karena itu, Persamaan (11) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{1}{n} R^{-\frac{1}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \frac{\partial R}{\partial x} \quad (12)$$

Dengan mendefinisikan debit $Q = uA$, maka diperoleh turunan parsial berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} \quad (13)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (9), (10), dan (12) ke dalam Persamaan (13) dan diatur kembali susunan persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R}{3b} \right) \quad (14)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (14) ke dalam Persamaan (5) dan diatur kembali susunan persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial x} + \beta = 0 \quad (15)$$

dengan

$$\alpha = 2 \frac{Q}{A} + \frac{\frac{gA}{b} - \frac{Q^2}{A^2}}{\frac{Q}{A} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R}{3b} \right)} \quad (16)$$

$$\beta = gA(S_f - S_0) \quad (17)$$

Persamaan (1) dan (15) dideskripsikan menggunakan metode beda hingga dan diperoleh persamaan beda sebagai berikut

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_i^j) (Q_i^j - Q_{i-1}^j) - \beta_i^j \Delta t \quad (18)$$

$$A_i^{j+1} = A_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_i^{j+1} - Q_{i-1}^{j+1}) \quad (19)$$

$$\alpha_i^j = \left(2 \frac{Q_i^j}{A_i^j} + \frac{\frac{gA_i^j}{b} - \frac{Q_i^{j2}}{A_i^{j2}}}{\frac{Q_i^j}{A_i^j} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R_i^j}{3b} \right)} \right) \quad (20)$$

$$\beta_i^j = gA_i^j \left((S_f)_i^j - S_0 \right) \quad (21)$$

Skema beda hingga (18) dan (19) digunakan untuk simulasi penelusuran aliran pada sungai dengan penampang berbentuk persegi panjang.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Skema numerik dari model yang disederhanakan akan diaplikasikan pada permasalahan penelusuran aliran air di sungai prismatic. Sebuah sungai prismatic dengan penampang berbentuk persegi panjang dialiri air dari arah hulu. Dengan memanfaatkan data debit yang masuk ke dalam sungai prismatic, maka di daerah hilir akan diamati perubahan perilaku variabel aliran air yaitu debit. Adapun beberapa komponen umum yang digunakan untuk simulasi numerik sebagai berikut: panjang sungai yang ditinjau $L = 2000$, lebar sungai konstan $b = 5$, kemiringan dasar sungai $S_0 = 0.0005$, koefisien kekasaran Manning $n = 0.0138$, percepatan gravitasi $g = 9.81$, langkah ruang $\Delta x = 1$, langkah waktu $\Delta t = 0.1$ dan simulasi dilakukan selama 60 satuan waktu, $T = 60$.

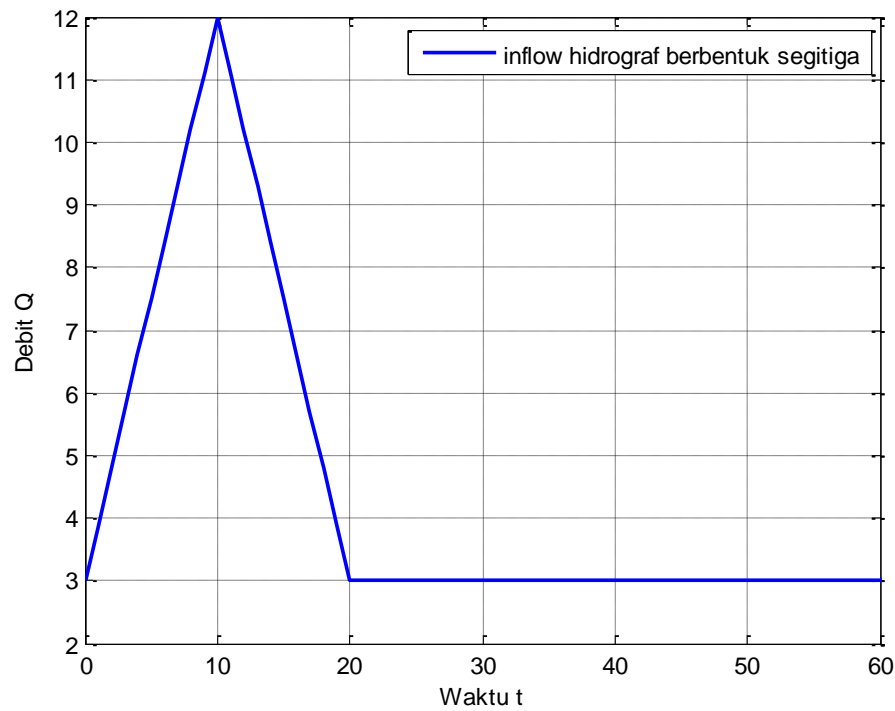
Sebuah sungai prismatic dengan penampang berbentuk persegi panjang dialiri air dari arah hulu. Dari arah hulu tercatat inflow hidrograf berbentuk segitiga masuk ke dalam sungai dengan data sebagai berikut,

$$Q(0, t) = \begin{cases} 3 + \frac{9}{10}t & \text{jika } 0 \leq t < 10 \\ 12 - \frac{9}{10}(t - 10) & \text{jika } 10 \leq t < 20 \\ 3 & \text{jika } t \geq 20 \end{cases} \quad (22)$$

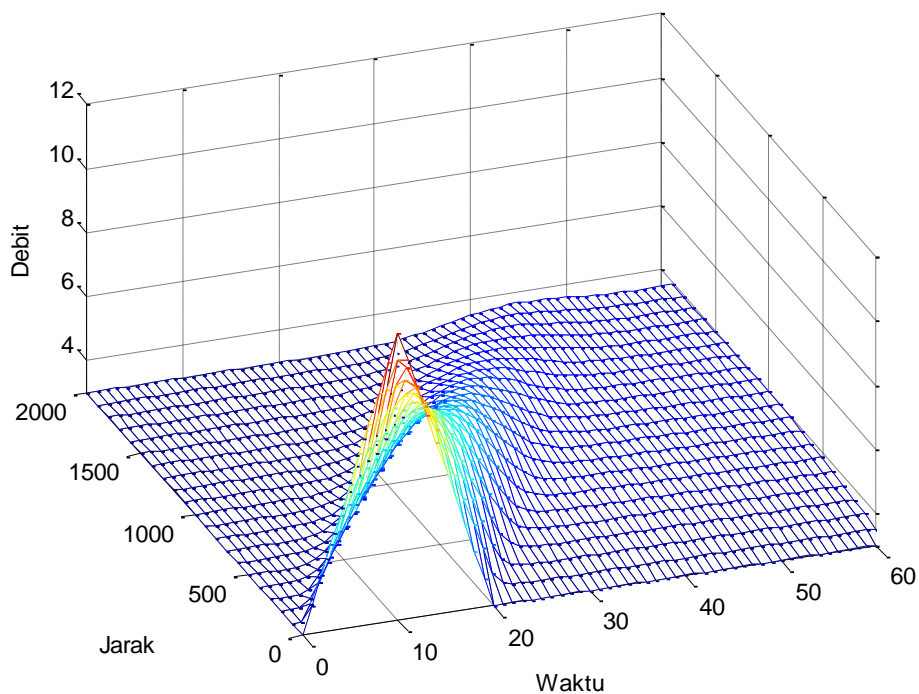
dengan kondisi awalnya adalah $Q(x, 0) = 3, A(x, 0) = 3$. Profil inflow hidrograf yang masuk ke sungai prismatic dapat dilihat pada Gambar 1.

Gambar 1 memperlihatkan kuantitas debit yang akan masuk ke dalam sungai prismatic secara bertahap selama 20 satuan waktu, $0 < t \leq 20$. Mula-mula debit yang masuk ke dalam sungai prismatic cukup kecil yaitu sebesar $Q = 3$. Seiring dengan bertambahnya waktu, debit yang masuk untuk mengisi badan sungai semakin besar hingga mencapai puncaknya pada saat $t = 10$ yaitu sebesar $Q = 12$. Setelah itu, debit yang masuk secara berangsur-angsur berkurang hingga tidak ada lagi debit yang masuk ke dalam badan sungai dan hal ini terjadi pada saat $t = 20$. Berdasarkan data debit di hulu seperti ini, maka pada pembahasan berikutnya akan ditampilkan beberapa hasil simulasi tentang perubahan perilaku variabel aliran air berupa debit (outflow hidrograf) di daerah hilir sungai.

Hasil simulasi perubahan variabel aliran air berupa outflow hidrograf di sepanjang sungai prismatic dapat dilihat pada Gambar 2. Gambar tersebut memperlihatkan animasi pergerakan debit ke arah hilir selama waktu $0 < t \leq 60$ akibat adanya inflow hidrograf berbentuk segitiga yang masuk ke dalam sungai prismatic selama waktu $0 < t \leq 20$.



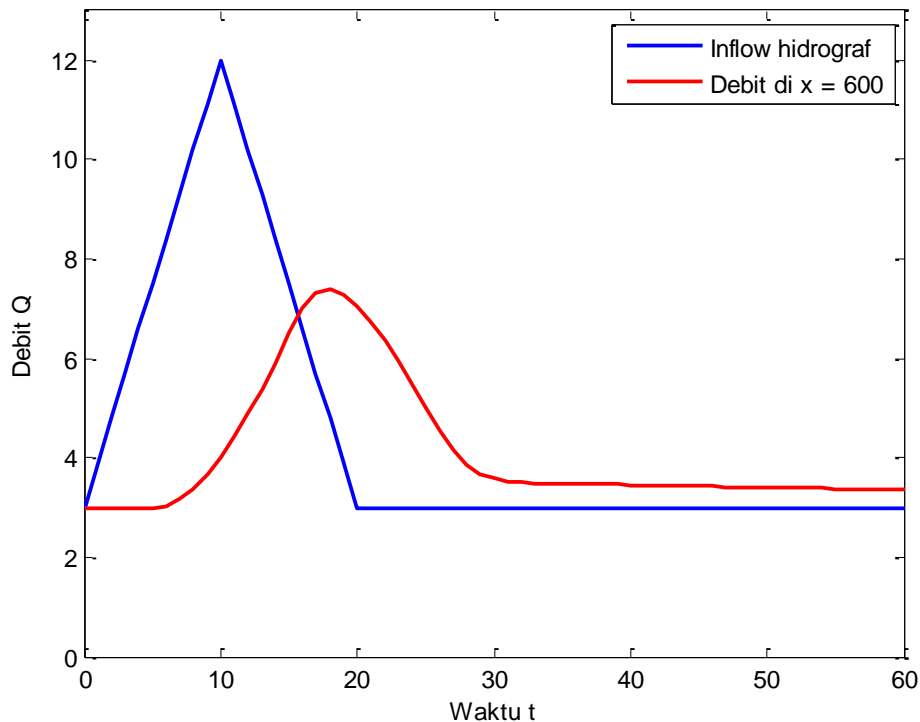
Gambar 1. Profil inflow hidrograf berbentuk segitiga yang masuk ke dalam sungai prismatic.



Gambar 2. Profil debit akibat adanya inflow hidrograf berbentuk segitiga

Dari gambar tampak bahwa debit yang masuk ke dalam badan sungai akan berpropagasi ke arah hilir untuk setiap satuan waktunya dengan kuantitas debit yang semakin lama semakin menyusut hingga pengaruh inflow hidrograf hilang. Inflow hidrograf tersebut akan mengalami peredaman sepanjang sungai karena pengaruh gesekan antara air

dengan dasar dan dinding sungai sehingga semakin jauh dari sumber debit maka semakin besar penyusutan debitnya.



Gambar 3. Perbandingan antara inflow hidrograf berbentuk segitiga dengan debit di $x = 600$ yang menunjukkan adanya penurunan puncak debit

Pada Gambar 3 disajikan inflow hidrograf berbentuk segitiga dan sebuah outflow hidrograf yang diamati di lokasi yang berjarak 600 dari hulu. Dari gambar tampak bahwa debit maksimum mengalami penyusutan dari $Q = 12 \text{ m}^3/\text{det}$ menjadi $Q = 7.38 \text{ m}^3/\text{det}$ dan waktu terjadinya debit maksimum juga bergeser dari $t = 10$ detik menjadi $t = 18$ detik. Dari Gambar tampak bahwa semakin jauh jaraknya dari hulu maka akan semakin besar penyusutan debit maksimumnya dan semakin besar pula pergeseran waktunya.

KESIMPULAN

Telah dihasilkan skema numerik yang stabil untuk mencari solusi hampiran dari Persamaan Saint Venant yang berlaku pada sungai dengan penampang basah berbentuk persegi panjang. Dari model numerik tersebut kita bisa mensimulasikan perilaku aliran air di hilir sungai prismatic. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin jauh dari sumber debit maka debit puncak semakin mengalami peredaman sepanjang sungai.

DAFTAR RUJUKAN

- Bharali, B., & Misra, U. K. (2020). Investigation of Flood Routing Using Variable Parameter Kinematic Wave Model (VPKWM) for Non-Prismatic Natural Channel in an Ungauged Basin. *Journal of Applied Engineering Sciences*, 10 (2), 111–118. <https://doi.org/10.2478/jaes-2020-0017>
- Chaudhry, M. H. (2008). *Open-Channel Flow*. Springer Science+Business Media.
- Chow, V. T., Maidment, D. R., & Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. Mc. Graw-Hill Book



Company.

- Cunge, F. P., Verwey, F. M., & Holly, F. M. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program.
- Keskin, M. E., & Ağiralıoğlu, N. (1997). A simplified dynamic model for flood routing in rectangular channels. *Journal of Hydrology*, 202 (1–4), 302–314. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(97\)00072-3](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(97)00072-3)
- Sulistiyono, B. A., Samijo, & Yohanie, D. D. (2021). Numerical Simulation of Flood Routing using the Simplified Saint Venant Equations in Rectangular Channels. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3 (2), 63–74. <https://doi.org/10.15408/inprime.v3i2.19747>
- Szymkiewics, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Water Science and Technology Library, Springer.